

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $x_1, \dots, x_n$ τυχαία δείγματα με $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 < x < \theta$
(Αρα ομοιόμορφη στο $(0, \theta)$). Να βρεθεί ΑΟΕΔ της θ και της $\frac{1}{\theta}$

Πρέπει να βρω:
Τις επάρκεις και πλήρεις σ.σ. για το θ
και $EU_1(T) = \theta$
 $EU_2(T) = \frac{1}{\theta}$

Τότε $U_1(T), U_2(T)$ ΑΟΕΔ αν $\theta, \frac{1}{\theta}$ αντιστοιχούν.
 $\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = g(T, \theta)h(x)$

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Έδω έχουμε: $\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n} I_{(x_n, +\infty)}(\theta)$
Θα πρέπει να ικανοποιούνται αυτά: $0 < x_1 < \theta$
 $0 < x_2 < \theta \Rightarrow x_n < \theta < +\infty$
 $0 < x_3 < \theta$

$$Eh(T) = 0 \quad \forall t \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$$

Είπαμε ότι ομοιόμορφη

$$\text{Αρα } Eh(T) = \int h(t) f_T(t) dt = 0 \quad \forall \theta$$

πρέπει να βρω αυτήν για να βρω τα άλλα ομοιόμορφα

Αρα ψάχνω την σ.π.π του $T = X_n$

Από το προηγούμενο μάθημα: $f_{X_n}(y) = n - F_X(y)^{n-1} f_X(y)$

$$F_X(y) = P(X \leq y) = \int_0^y \frac{1}{\theta} dx = \frac{y}{\theta}, \quad 0 < y < \theta$$

$$\text{Αρα } f_{X_n}(y) = n \left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 < y < \theta$$

$$\int_0^\theta \frac{nt^{n-1}}{\theta^n} h(t) dt = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow \int_0^\theta t^{n-1} h(t) dt = 0 \Rightarrow \theta^{n-1} h(\theta) = 0$$

$$h(\theta) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$$

Αποδείξατε ότι υπάρχει και ότι η πληρότητα

Πρέπει να βρω δύο ανεξαρτησίες, έναν U_1 και έναν U_2 .

Δοκιμάζω:

$$E X_{(n)} = \int_0^{\theta} \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} t dt$$

Αν είχα $X_{(n)}^2$
θα έβγαζε t^2

δείνω συνέχεια του $X_{(n)}$

$$= \frac{n}{\theta^n} \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{\theta} = \frac{n}{\theta} \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$E \left[\frac{n+1}{n} X_{(n)} \right] = \theta$$

Δοκιμάζω:

$$E \frac{1}{X_{(n)}} = \int_0^{\theta} \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} \frac{1}{t} dt = \frac{n}{\theta^n} \frac{t^{n-2+1}}{n-2+1} = \frac{n}{\theta} \frac{\theta^{n-1}}{n-1}$$

$$E \left[\frac{n-1}{n} \frac{1}{X_{(n)}} \right] = \frac{1}{\theta}$$

Ε' τρόπος

$$E U(T) = \theta^k$$

$$\int_0^{\theta} \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} U(t) dt = \theta^k \Rightarrow \int_0^{\theta} t^{n-1} U(t) dt = \frac{\theta^{k+n}}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta^{n-1} U(\theta) = \frac{(k+n)\theta^{k+n-1}}{n}$$

$$U(\theta) = \frac{k+n}{n} \theta^{k+n-1-n+1}$$

$$\boxed{U(\theta) = \frac{k+n}{n} \theta^k} \text{ Δηλαδή } U(T) = \frac{n+k}{n} T^k$$

$$\text{Για } k=1 \quad U_1(T) = \frac{n+1}{n} T$$

$$\text{Για } k=-1 \quad U_2(T) = \frac{n-1}{n} T^{-1}$$

ΚΑΝΟΝΟΣ ΛΕΙΒΝΙΤΖ:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(x, \theta) dx = \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx + f(b(\theta), \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} b(\theta) - f(a(\theta), \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} a(\theta)$$

ΘΑ ΔΙΝΕΤΑΙ ΣΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΛΛΗ
ΦΟΡΑ:

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαία δείγματα
από $f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}$

με $x \geq \theta$

Να βρεθεί ΑΟΕΣ εκτιμήτρια
εν θ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1^{ος}: Εκ των υστέρων Εκτιμήτης Bayes

Έστω $x_1, \dots, x_n$ τυχαία δείγματα από έναν πληθυσμό με σ.π.π ή σ.π $f(x|\theta)$ όπου θ η τιμή της τ.λ. Θ βέ εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\theta)$. Ο εκ των υστέρων εκτιμήτης Bayes της παραμέτρου θ ορίζεται από τη σχέση: $T^* = E_{\theta|x} g(\theta) = \begin{cases} \frac{\sum g(\theta) \pi(\theta|x)}{\int g(\theta) \pi(\theta|x)}, & \text{διακριτό } \theta \\ \int g(\theta) \pi(\theta|x), & \text{συνεχές } \theta \end{cases}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2^{ος}: ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΕΩΣ ΚΑΤΑ BAYES

Ορίζεται ως συνάρτηση διακινδυνεύσεως κατά Bayes:

$R(\pi, d)$ για τον κανόνα απόφασης d , έχοντας π εκ των προτέρων κατανομή
Απόφαση $R(\pi, d) = E_{\theta} R(\theta, d)$
Υπενθύμιση: $R(\theta, d) = E_{x|\theta} L(\theta, d)$

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΑ:

$$R(\pi, d) = E_{\theta} E_{x|\theta} L(\theta, d)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3^{ος}: Εκτιμήτης Bayes

Ένας εκτιμήτης d^* ορίζεται ως εκτιμήτης Bayes αν ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση διακινδυνεύσεως κατά Bayes, δηλαδή:

$$R(\pi, d^*) = \min R(\pi, d), d \in D$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με σ.π.π ή σ.π $f(x|\theta)$, όπου θ η τιμή της τ.λ. Θ βέ εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\theta)$. Αν $L(\theta, d)$ είναι η συνάρτηση απώλειας, τότε ο εκτιμήτης Bayes της $g(\theta)$ είναι το d^* που ελαχιστοποιεί $E_{\theta|x} L(g(\theta), d)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Εξ' ορισμού ο d^* ελαχιστοποιεί την $R(\pi, d) = E_{\theta} R(\theta, d)$
δηλ. ελαχιστοποιεί την συνεχή περίπτωση (χωρίς να είναι οι γενικές περιπτώσεις) το ολοκλήρωμα

$$\int_{\text{στο πεδίο}} R(\theta, d) \pi(\theta) d\theta = \int E_{x|\theta} L(\theta, d) \pi(\theta) d\theta = \iint L(\theta, d) f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta$$

φίλοι μου

Η ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΕΩΣ ΚΑΤΑ BAYES ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΤΗΝ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΕΩΣ ΚΑΤΑ BAYES

Στόχος: $E_{\theta|x} L(\theta, d) = \int L(\theta, d) \pi(\theta|x) d\theta$
 Να ελαχιστοποιηθεί αυτό $\nearrow$
 $= \int \int L(\theta, d) g(x, \theta) dx d\theta$
 $= \int \int L(\theta, d) \pi(\theta|x) h(x) dx d\theta$
 (PC(A|B), PC(B))

Πρέπει να ξέρω
αυτά τα αποτελέσματα:

$T^* = E_{\theta|x} g(\theta)$
 $R(n, d) = E_{\theta} R(\theta, d)$
 $R(\theta, d) = E_{x|\theta} L(\theta, d)$
 mi η $E_{\theta|x}$

$E_{\theta|x} L(\theta, d) = \int L(\theta, d) \pi(\theta|x) d\theta$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν η συνάρτηση απώλειας είναι το ΜΤΣ τότε ο εκτιμητής Bayes της $g(\theta)$ είναι $d^* = E_{\theta|x} g(\theta)$ $\square$

Απόδειξη:

Ο d^* εκτιμητής Bayes ελαχιστοποιεί σύμφωνα με τη προηγούμενη πρόταση:

$d^* = \min_d E_{\theta|x} L(g(\theta), d) \stackrel{L \text{ είναι το ΜΤΣ}}{=} \min_d E_{\theta|x} (g(\theta) - d)^2 =$
 $= \min_d \int (g(\theta) - d)^2 \pi(\theta|x) d\theta$

Παραγωγίζω ως προς d το $\int (g(\theta) - d)^2 \pi(\theta|x) d\theta$

Η παραγωγή δίνει: $\int -2(g(\theta) - d) \pi(\theta|x) d\theta$

Θέτω τη παράγωγο ίση με μηδέν

$\int g(\theta) \pi(\theta|x) d\theta = d \int \pi(\theta|x) d\theta$

Η 2η παράγωγος ως προς d δίνει: $\int 2 \pi(\theta|x) d\theta > 0$

Άρα όταν έχω σημείο ελαχίστου (και όχι μέγιστου!)

$d^* = E_{\theta|x} g(\theta)$

2η ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν η συνάρτηση απώλειας είναι το Α.Σ δηλ. $L(\theta, d) = |\theta - d|$ τότε ο εκτιμητής Bayes της θ είναι $d^* = \text{median } \pi(\theta|x)$

ΥΠΕΡΒΟΛΗΜΕΝΗ:

Διάμεσος = το σημείο που χωρίζει σε δύο ίσους μέρη

Ανάλυση:

$$d^* = \min_{\theta | x} L(\theta, d) = \min_d \int |\theta - d| \pi(\theta | x) d\theta = \min_d \left[\int_{-\infty}^d (\theta - d) \pi(\theta | x) d\theta + \int_d^{+\infty} (d - \theta) \pi(\theta | x) d\theta \right]$$

$$= \min_d \left[\int_{-\infty}^d (\theta - d) \pi(\theta | x) d\theta + \int_d^{+\infty} (d - \theta) \pi(\theta | x) d\theta \right]$$

Ο κανόνας του Leibnitz: Παραγωγίζω ως προς d

$$\frac{\partial}{\partial d} \left[\int_{-\infty}^d (\theta - d) \pi(\theta | x) d\theta + \int_d^{+\infty} (d - \theta) \pi(\theta | x) d\theta \right] = \frac{\partial}{\partial d} \left[\int_{-\infty}^d (\theta - d) \pi(\theta | x) d\theta \right] + \frac{\partial}{\partial d} \left[\int_d^{+\infty} (d - \theta) \pi(\theta | x) d\theta \right]$$

$$= \int_{-\infty}^d \pi(\theta | x) d\theta - \int_d^{+\infty} \pi(\theta | x) d\theta = 0$$

$$\int_{-\infty}^d \pi(\theta | x) d\theta = \int_d^{+\infty} \pi(\theta | x) d\theta$$

$$\int_{-\infty}^{d^*} \pi(\theta | x) d\theta + \int_{d^*}^{+\infty} \pi(\theta | x) d\theta = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{d^*} \pi(\theta | x) d\theta = 0.5$$

$$\text{Άρα } \int_{-\infty}^{d^*} \pi(\theta | x) d\theta = 0.5$$

1η παράγωγος: $\int_{-\infty}^d \pi(\theta | x) d\theta - \int_d^{+\infty} \pi(\theta | x) d\theta$

2η παράγωγος: $\pi(d | x) - (-1) \pi(d | x) = 2\pi(d | x) > 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 1ο

$X_1, \dots, X_n$ τυχαία δείγματα από $\text{Poisson}(\theta)$, όπου θ η τιμή της τ.λ. με εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\theta)$ είναι Γάμμα $(p, \frac{1}{q})$

- (i) Να βρεθεί ο εκκρινής Bayes της θ και της $e^{-\theta}$ έχοντας ως συνάρτηση απώλειας το MLE
- (ii) Να βρεθεί ο εκκρινής Bayes της θ με συνάρτηση απώλειας $L(\theta, d) = e^{k(d-\theta)} - k(d-\theta) - 1$

$$f(x_i | \theta) = \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!}, x_i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{p-1} e^{-\theta q}}{\Gamma(p)}, \theta > 0$$

$$\pi(\theta | x) = \frac{\pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)}{\int \pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) d\theta} = \frac{\frac{\theta^{p-1} e^{-\theta q}}{\Gamma(p)} \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!}}{\int_0^{+\infty} \frac{\theta^{p-1} e^{-\theta q}}{\Gamma(p)} \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} d\theta}$$

$$= \frac{\theta^{p+\sum x_i - 1} e^{-(q+n)\theta}}{\int_0^{+\infty} \theta^{p+\sum x_i - 1} e^{-(q+n)\theta} d\theta} = \frac{\theta^{p+\sum x_i - 1} e^{-(q+n)\theta}}{\Gamma(p + \sum x_i)}, \theta > 0$$

$$\theta | x \sim \text{Γάμμα}(p + \sum x_i, \frac{1}{q+n})$$

(5)

$$(1) d_1^* = E_{\theta|X} \theta$$

$$d_2^* = E_{\theta|X} e^{-\theta}$$

Ξέρω $\theta|X \sim \text{Gamma}(p+\sum x_i, \frac{1}{q+1})$ άρα $E_{\theta|X} \theta \stackrel{\text{τυπολογώ}}{=} \frac{p+\sum x_i}{q+1}$ γιατί η μέση αληθ. της (a,b) είναι $a \cdot b$

Άλλος τρόπος:

$$\int_0^{\infty} \theta \frac{\theta^{p+\sum x_i - 1} e^{-\theta(q+1)}}{\Gamma(p+\sum x_i)} d\theta = \frac{(q+1)^{p+\sum x_i}}{\Gamma(p+\sum x_i)} \int_0^{\infty} \theta^{p+\sum x_i + 1 - 1} e^{-\theta(q+1)} d\theta$$

δεν δίνω να $\Gamma(a+1) = a \Gamma(a)$ για να έχω $a-1$ στο Γάμμα κατάλληλα

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta^{a-1} e^{-\theta/b}}{B^a \Gamma(a)} d\theta = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} \theta^{a-1} e^{-\theta/b} d\theta = B^a \Gamma(a)$$

ειδική περίπτωση για $a = p+\sum x_i + 1$
 $B = \frac{1}{q+1}$

$$\frac{(q+1)^{p+\sum x_i}}{\Gamma(p+\sum x_i)} \cdot \frac{\Gamma(p+\sum x_i + 1)}{(q+1)^{p+\sum x_i + 1}}$$

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = a$$

$$2) E_{\theta|X} e^{-\theta} = \int e^{-\theta} \pi(\theta|X) d\theta =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\theta} \frac{\theta^{p+\sum x_i - 1} e^{-\theta(q+1)}}{\Gamma(p+\sum x_i)} (q+1)^{p+\sum x_i} d\theta =$$

$$= \frac{(q+1)^{p+\sum x_i}}{\Gamma(p+\sum x_i)} \int_0^{\infty} \theta^{p+\sum x_i - 1} e^{-\theta(q+1+1)} d\theta$$

ειδική περίπτωση του $\int_0^{\infty} \theta^{a-1} e^{-\theta/b} d\theta = \Gamma(a) B^a$
για $a = p+\sum x_i$
 $B = \frac{1}{q+1+1}$

$$E_{\theta|X} e^{-\theta} = \frac{(q+1)^{p+\sum x_i}}{\Gamma(p+\sum x_i)} \cdot \frac{\Gamma(p+\sum x_i)}{(q+1+1)^{p+\sum x_i}}$$

2ος τρόπος (με το τυπολόγιο της ρογιογενήτριας)

$$E_{\theta|X} e^{-\theta} = m_{\theta|X}(t=-1) \stackrel{\text{θίνω Γάμμα}(p+\sum x_i, \frac{1}{q+1})}{=} (1 - \frac{1}{q+1}(-1))^{-(p+\sum x_i)}$$

με τον προνόδεον:

$$-1 \leq t < \frac{1}{b} = q+1$$

πρέπει $-1 \leq q+1$ να ισχύει
θετικά

Υπενθύμιση
 $m_X(t) = E(e^{tx})$

ii)

$$L(\theta, d) = e^{k(d-\theta)} - k(d-\theta) - 1$$

Ζητώ να βρω εκκλιτική Bayes

$$\min_d E_{\theta|x} L(\theta, d) = \min_d \int L(\theta, d) \pi(\theta|x) d\theta = \min_d \int_0^{\infty} [e^{k(d-\theta)} - k(d-\theta) - 1] \pi(\theta|x) d\theta$$

Παραγώγιση ως προς d

$$\int_0^{\infty} (k e^{k(d-\theta)} - k) \pi(\theta|x) d\theta$$

Παραγώγιση ως προς d, το πρώτο δεν είναι σταθερό

Θα δω να κινδυνεύει:

Θέτω ίσο κινδύνου:

$$\int_0^{\infty} (k e^{k(d-\theta)} - k) \pi(\theta|x) d\theta = 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{k(d-\theta)} \pi(\theta|x) d\theta = \int_0^{\infty} \pi'(\theta|x) d\theta \Rightarrow e^{kd} \int_0^{\infty} e^{-k\theta} \pi(\theta|x) d\theta = 1$$

$$e^{kd} E_{\theta|x} e^{-k\theta} = 1 \Rightarrow e^{kd} = \frac{1}{E_{\theta|x} e^{-k\theta}}$$

$$kd = \ln \left[\frac{1}{E_{\theta|x} e^{-k\theta}} \right] \Rightarrow d = \frac{1}{k} \ln \left[\frac{1}{E_{\theta|x} e^{-k\theta}} \right]$$

2ος παραγώγος: $\int_0^{\infty} k^2 e^{k(d-\theta)} \pi(\theta|x) d\theta$

$$E_{\theta|x} e^{-k\theta} = m_{\theta|x}(t = -k)$$

$$= \left[1 - \frac{1}{q \ln(-k)} \right]^{-(p \ln(-k))}$$

$$m_x(t) = E(e^{t^T x})$$

2ος τρόπος:

$$E_{\theta|x} e^{-k\theta} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\theta} \theta^{p \ln(-k) - 1} e^{-\theta(q \ln(-k))}}{\Gamma(p \ln(-k))} d\theta$$

$$a = p \ln(-k)$$

$$b = \frac{1}{q \ln(-k)}$$

Για το σπίτι:

Έστω $x_1, \dots, x_n$ τυχαίο δείγμα από διωνυμική $B(1, \theta)$

$$f(x_i | \theta) = \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}, \quad x_i = 0, 1$$

κ.ε. εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\theta) = \text{Beta}(a, b)$. Να βρεθεί ο εκκλιτικός Bayes ως προς θ και ως προς $\theta(1-\theta)$, όταν σωστότερη απώλεια είναι το MLE

Υπόδειξη: Θα δίνεται αυτόριο το τυπολόγιο.